

# 離散データに対する離散多項式曲線あてはめ

関弥 史紀<sup>1,a)</sup> 杉本 晃宏<sup>2,b)</sup> 井宮 淳<sup>3,c)</sup>

**概要:** 離散多項式曲線は2本の多項式曲線の間にある離散点の集合として定義される。従来の連続なモデルの代わりにこの離散モデルを用いることで、与えられた2次元の離散点集合に対し、より優れたあてはめができることを、インライアーの個数という観点から示す。Rock Climbing と名づける提案手法は、適当な反復回数のRANSACによって得られた初期解に対して局所探索法を適用することで最適解、すなわち最も多くの点を含む離散多項式曲線を効率的に探す。実験によってアルゴリズムの効率性を実証する。

**キーワード:** 曲線あてはめ, 離散多項式曲線, 外れ値, 合意集合, RANSAC, 離散幾何

## 離散データに対する離散多項式曲線あてはめ

関弥 史紀<sup>1,a)</sup> 杉本 晃宏<sup>2,b)</sup> 井宮 淳<sup>3,c)</sup>

**Abstract:** 離散多項式曲線は2本の多項式曲線の間にある離散点の集合として定義される。従来の連続なモデルの代わりにこの離散モデルを用いることで、与えられた2次元の離散点集合に対し、より優れたあてはめができることを、インライアーの個数という観点から示す。Rock Climbing と名づける提案手法は、適当な反復回数のRANSACによって得られた初期解に対して局所探索法を適用することで最適解、すなわち最も多くの点を含む離散多項式曲線を効率的に探す。実験によってアルゴリズムの効率性を実証する。

**Keywords:** curve fitting, discrete polynomial curve, outliers, consensus set, RANSAC, discrete geometry

### 1. はじめに

画像解析とコンピュータビジョンの分野において、直線や円などの基本的な形状モデルのあてはめは重要な手続きであり、特徴検出をはじめとした様々な処理において用いられる。モデルあてはめの手法はいくつかあるが、あてはめに用いられるのは、離散な環境においてもしばしば連続なモデルである。しかしながら、離散空間においては、連続なモデルの代わりに離散化されたモデルを用いるのが適

切である。2次元離散空間における離散モデルあてはめに関しては、直線あてはめ [1,6], 円環あてはめ [7], そして多項式曲線あてはめ [4] が研究されている。このうち、直線あてはめ [1,6] と円環あてはめ [7] については、アウトライアー、すなわちモデルにあてはまらない点を含むデータ集合に対して有効な手法が開発されているが、多項式曲線あてはめについてはそのような手法は未報告である。本研究の目的は、アウトライアーを含む離散点の集合に対する離散多項式曲線あてはめである。

曲線あてはめに用いられる手法として最も一般的なのは最小二乗法 (method of Least Squares, LS) である。これは各データとの二乗残差の和を最小化する。解析的に解が求まる手法であるが、アウトライアーの存在に対して極めて弱く、1つのアウトライアーが推定に大きな影響を与え得るという問題を抱えている。ロバスト性を確保するために、二乗の代わりに他の関数の和を最小化する同タイプの推定法 (M-estimator と総称される) が提案された。例

<sup>1</sup> 千葉大学 大学院融合科学研究科  
Graduate School of Advanced Integration Science, Chiba University

<sup>2</sup> 国立情報学研究所  
National Institute of Informatics

<sup>3</sup> 千葉大学 総合メディア基盤センター  
Institute of Media and Information Technology, Chiba University

a) sekiya@chiba-u.jp

b) sugimoto@nii.ac.jp

c) imiya@faculty.chiba-u.jp

例えば、最小絶対値法 (least absolute values) は各データとの残差の絶対値の和を最小化する。これらと異なったアプローチでより高いロバスト性を達成したのは、最小メジアン法 (Least Median of Squares, LMS, LMedS) [5] である。二乗残差の (和ではなく) 中央値を最小化するこの手法は、与えられたデータの半数以下のアウト라이어を許容する。しかし、裏を返せばアウト라이어の個数がそれを上回る場合には使えないということである。コンピュータビジョンの分野との関わりが深いのは RANdom SAmple Consensus (RANSAC) [2] である。イン라이어の個数によってあてはめの評価を行うこの手法は、いかなるアウト라이어の比率に対しても適用できる。本稿は RANSAC を基礎としたより効率的な離散多項式曲線あてはめの手法を提案する。

## 2. 離散多項式曲線あてはめ問題

### 2.1 諸概念の定義

ユークリッド平面における連続な  $k$  次多項式曲線は、 $a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \in \mathbb{R}$  として、

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = a_1 x^k + a_2 x^{k-1} + \dots + a_k x + a_{k+1}\} \quad (1)$$

によって定義される。ここで、 $\mathbb{R}^2$  は 2 次元の実数全体の集合を表す。

式 (1) の多項式曲線の離散化を、 $f(x) = a_1 x^k + a_2 x^{k-1} + \dots + a_k x + a_{k+1}$  として、

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq y - f(x) \leq w\} \quad (2)$$

によって定義し、離散多項式曲線と呼ぶ。 $w$  は与えられた実定数である。 $a_i, k, w$  をそれぞれ離散多項式曲線  $D$  の係数、次数、幅と呼ぶ ( $i = 1, \dots, k+1$ )。幾何学的には、 $D$  は式 (2) において等式で与えられる 2 本の曲線  $y = f(x)$  と  $y = f(x) + w$  の間にある離散点の集合であり、 $w$  は 2 曲線間の  $y$  軸方向の距離を示す。離散多項式曲線は Digital Level Layer (DLL) [3] に属する。DLL は基本的な離散形状を表すための概念であり、ラスタ画像をベクタ画像に変換する際に有用である。式 (1) の  $x$  と  $y$  の役割を入れかえた多項式曲線およびその離散化を考えることもできるが、その場合も同様の議論が成り立つので、本稿では式 (2) の形のみを扱う。

あてはめの問題を議論するために、離散多項式曲線に関する概念をいくつか定義する。有限個の離散点集合

$$S = \{p_j \in \mathbb{Z}^2 : j = 1, 2, \dots, n\}$$

と離散多項式曲線  $D$  が与えられたとき、 $p_j \in D$  をイン라이어と呼び、 $p_j \notin D$  をアウト라이어と呼ぶ。イン라이어の集合  $C = S \cap D$  を合意集合と呼ぶ。2 本の多項式曲線  $y = f(x)$  と  $y = f(x) + w$  を  $D$  の支持線と呼ぶ。2 本の

支持線を区別したいときには、 $y = f(x)$  を下の支持線と呼び、 $y = f(x) + w$  を上の支持線と呼ぶ。支持線上のイン라이어を  $D$  の臨界点と呼ぶ。臨界点がどちらの支持線に属するかにまで言及したいときは、下の支持線上のものを下の臨界点、上の支持線上のものを上の臨界点と呼ぶ。

### 2.2 離散多項式曲線あてはめ問題の記述

$\mathbb{D}_{k,w}$  を次数が  $k$  以下であり、幅が  $w$  であるすべての離散多項式曲線の集合として、離散多項式曲線あてはめ問題は次のように記述できる。

離散多項式曲線あてはめ

入力：離散点集合  $S$ ，次数  $k$ ，幅  $w$ 。

出力： $|C|$  を最大にする  $D \in \mathbb{D}_{k,w}$  の係数  $a_1, \dots, a_{k+1}$ 。

要素数が最大である合意集合を最大合意集合と呼び、 $C_{\max}$  で表す。 $C_{\max}$  は 1 つとは限らず、また 1 つの合意集合に対して、それを持つ離散多項式曲線は 1 つとは限らない。したがって、最適解は 1 組とは限らないことに注意されたい。

## 3. 離散多項式曲線の性質

$k$  次以下の多項式曲線は、それが通る  $k+1$  点により一意に決まる。離散多項式曲線にも同様な性質があり、定理 1 はそれについて述べる。

定理 1.  $x$  座標がそれぞれ異なる  $k+1$  個の点を臨界点として選び、それぞれについて上下どちらの支持線に属するかが決定すれば、それらを持つ離散多項式曲線  $D \in \mathbb{D}_{k,w}$  は一意に決まる。

証明。離散多項式曲線の上下の支持線間には  $y$  軸方向に  $w$  の距離がある。したがって、ある点  $(x, y)$  が上の支持線上にあることは、点  $(x, y-w)$  が下の支持線上にあることと同値である。このような点を考えることで、特定の点を臨界点として持つ離散多項式曲線を求める問題は、特定の点を通る多項式曲線を求める問題に還元することができる。つまり、2 本ある支持線のうち片方のみを考えればよいということである。

$x$  座標がそれぞれ異なる  $m$  個の点が臨界点として与えられたとき、それらのうち上の臨界点として与えられたもののそれぞれについて、 $y$  座標値を  $w$  だけ小さくした点を考えれば、それら点と下の臨界点として与えられた点はすべて下の支持線上になければならない。この条件のもとで、下の支持線の係数の自由度は  $k+1-m$  である。 $m = k+1$  であるとき、係数は一意に決まる。故に、 $k+1$  個の臨界点と、それぞれがどちらの支持線に属するかの情報から、離散多項式曲線は一意に決まる。図 1 は  $k=2$  の場合の例である。□

定理 1 は、 $k+1$  個の臨界点によって離散多項式曲線が

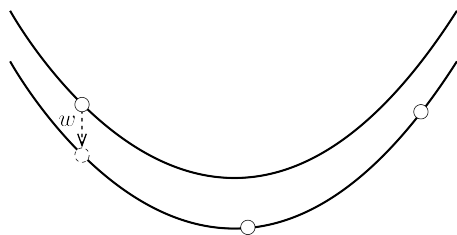


図 1 3 個の臨界点によって一意に決まる 2 次離散多項式曲線．破線で描かれたような点を考えれば，下の支持線は 3 個の点を通っていることになる． $x$  座標がそれぞれ異なる 3 点を通る 2 次多項式曲線は 1 つしか存在しない．したがって，離散多項式曲線が一意に決まる．

一意に決まることを述べている．したがって， $S$  の  $k+1$  点を臨界点として用いて生成される  $\mathbb{D}_{k,w}$  の離散多項式曲線の数は有限である．そのような離散多項式曲線の集合を  $\mathbb{G}_{S,k,w}$  とおく．もし  $\mathbb{G}_{S,k,w}$  の中に最大合意集合を持つものが含まれるならば， $\mathbb{G}_{S,k,w}$  の要素をすべて調べることで最適解を見つげられることになる．2 つめの定理はそれがほとんどの場合（すなわち， $S$  が  $x$  座標が異なる点を  $k+1$  個以上持つ場合）において事実であることを述べるが，その証明には 1 つの補題が必要である． $\mathbb{G}_{S,k,w}$  の離散多項式曲線は  $x$  座標がそれぞれ異なる臨界点を少なくとも  $k+1$  個持つから， $x$  座標がそれぞれ異なる点の数が  $k+1$  個に満たない合意集合は  $\mathbb{G}_{S,k,w}$  の全探索によっては見つげられない．補題 1 はそのような合意集合の中に最大合意集合が含まれないことを述べる．

補題 1. 入力点集合  $S$  が  $x$  座標がそれぞれ異なる点を  $k+1$  個以上持つとき，任意の最大合意集合  $C_{\max}$  は  $x$  座標がそれぞれ異なる  $k+1$  個以上の点を持つ．

証明． $l \leq k$  として，離散多項式曲線  $D \in \mathbb{D}_{k,w}$  についての合意集合  $C$  は， $x$  座標がそれぞれ異なる点を  $l$  個持つとする．図 2(a) に  $k=2, l=2$  の場合の例を示す．丸点が  $S$  の要素である．この  $C$  が最大合意集合でないことを証明する． $C$  の点が存在する  $l$  個の  $x$  座標において下の支持線が通る点を，それぞれ  $p_1, \dots, p_l$  とおく．下の支持線がこれらの点を通ることは， $C$  の各点がインライアーとなるための十分条件である． $S$  の条件より， $C$  のどの点とも  $x$  座標が異なるアウトライアーが存在する．その中から 1 点選び，その点から真下に引いた長さ  $w$  の線分上に点  $p_{l+1}$  をとる．図 2(a) では線分の下端に  $p_3$  がとられている．下の支持線が点  $p_1, \dots, p_{l+1}$  を通る離散多項式曲線  $D' \in \mathbb{D}_{k,w}$  は， $C$  のすべての点に加え， $D$  のアウトライアーの中から選んだ 1 点を含む． $D'$  の例を図 2(b) に示す．したがって  $C$  は最大合意集合ではない．□

以上の準備から，定理 2 を証明することができる．

定理 2.  $S$  が  $x$  座標がそれぞれ異なる点を  $k+1$  個以上持つとき，すべての最大合意集合  $C_{\max}$  について， $S \cap D = C_{\max}$  を満たす離散多項式曲線  $D \in \mathbb{G}_{S,k,w}$  が存在する．

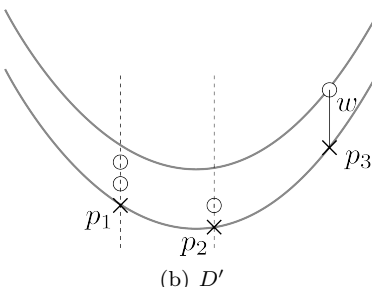
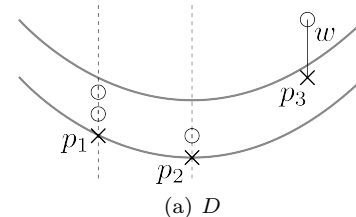


図 2  $x$  座標がそれぞれ異なる点を  $k+1$  個以上持たない合意集合が最大でないことの図解．これは  $k=2$  の場合の例である．丸点が  $S$  の要素を表す．(a) の離散多項式曲線  $D \in \mathbb{D}_{2,w}$  のすべてのインライアーは 2 つの  $x$  座標上にある．これら 2 つの  $x$  座標上で下の支持線が通る点を  $p_1, p_2$  とし，これら点のどちらとも  $x$  座標が異なる 1 つのアウトライアーから真下に引いた長さ  $w$  の線分上に  $p_3$  をとる． $p_1, p_2, p_3$  を通る 2 次多項式曲線を下の支持線とすることで，より多くのインライアーを持つ (b) の離散多項式曲線  $D' \in \mathbb{D}_{2,w}$  が得られる．したがって  $D$  についての合意集合は最大ではない．

証明． $S$  の条件と補題 1 より， $C_{\max}$  は  $x$  座標がそれぞれ異なる点を  $k+1$  個以上持つ． $D \in \mathbb{D}_{k,w}$  を  $S \cap D = C_{\max}$  を満たす離散多項式曲線とする． $D$  は  $x$  座標がそれぞれ異なる  $m$  個の臨界点を持つとする． $m \geq k+1$  の場合は，既に条件が満たされているので議論の必要はない．したがって， $m \leq k$  の場合を考える．

係数  $a_1, \dots, a_{k+1}$  を変化させると， $D$  の 2 本の支持線は， $y$  軸方向の距離  $w$  を保ちながら同様に変形する．これを  $D$  の変形と呼ぶ．この変形によって，インライアーを失うことなく， $x$  座標がそれぞれ異なる臨界点を  $k+1$  個まで増やせることが証明できれば，定理 2 が証明できたことになる．

$m$  個の臨界点についての制約のもとで， $k$  次離散多項式曲線の係数の自由度は  $k+1-m$  である（定理 1 の証明を参照）．したがって，現在の  $m$  個の臨界点を保持したまま  $D$  を変形させ，それらのどれとも  $x$  座標が異なる  $C_{\max}$  の点を少なくとも 1 個新たに臨界点にすることができる． $C_{\max}$  は  $x$  座標がそれぞれ異なる点を  $k+1$  個以上持つので，そのような点は必ず存在することに注意されたい．臨界点を増やす  $D$  の変形の例を図 3 に示す． $D$  を少しずつ変形させていったとき，インライアーである点がアウトライアーになる直前には，その点が臨界点となる瞬間が存在する．したがって，現在の臨界点を保ちつつ  $D$  を変形させていき，最初に  $D$  の外に出ようとした点を新たな臨界点とすることで，インライアーを失うことなく臨界点を増やすことができる．このような変形は  $m \geq k+1$  となるまで可

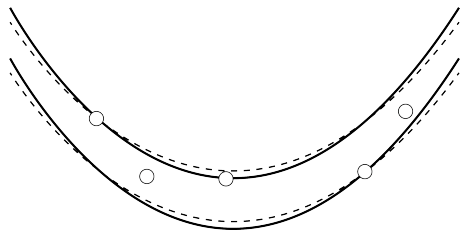


図 3 臨界点を増やす離散多項式曲線の変形．破線で描かれた 2 次離散多項式曲線を 2 個の臨界点を保持したまま変形し、もう 1 つの臨界点を得る．変形後の離散多項式曲線を実線で描く．このような変形は、 $x$  座標がそれぞれ異なる臨界点の個数が  $k + 1$  個に満たない限り可能である．

能である．したがって、定理 2 は真である． □

定理 2 は  $\{S \cap D : D \in \mathbb{G}_{S,k,w}\}$  の中に、すべての最大合意集合が含まれることを述べている．したがって、入力点集合  $S$  が  $x$  座標がそれぞれ異なる点を  $k + 1$  個以上持つならば、全探索によりすべての最大合意集合を見つけることができる．

## 4. 離散多項式曲線あてはめ手法

### 4.1 離散モデルを用いることの利点

RANSAC [2] により従来の連続な多項式曲線をあてはめるとき、インライアークアアウトライアークを決定する誤差のしきい値を  $w/2$  とすれば、形式的には幅  $w$  の離散多項式曲線をあてはめているのと同じである．しかし、この手法には常に最大合意集合を見つけられるという保証がない．図 4 がその例を示す． $k = 2, w = 0.5$  であるとき、合意集合  $\{(-4, 4), (-2, 2), (2, 1), (4, 5)\}$  を持つ（連続な）多項式曲線は実線で描かれた  $y = 0.25x^2 + 0.5$  のみであるが、この曲線上には点が存在しないので生成され得ない．またこの図から、 $k + 1$  点から生成した多項式曲線を上または下の支持線として用いる方法でも、 $C$  は見つけれられないことがわかる．したがって、このような合意集合が最大であったとき、連続なモデルを用いた RANSAC によっては最適解が得られない．

これに対して、離散多項式曲線を用いればすべての最大合意集合を必ず見つけられることを前節で証明した．この事実は、あてはめに離散モデルを用いることの妥当性を説明する．

### 4.2 Rock Climbing

離散モデルを用いた RANSAC によってすべての最大合意集合を見つけるためには、 $\mathbb{G}_{S,k,w}$  のすべての離散多項式曲線について合意集合を調べる必要がある． $x$  座標がそれぞれ異なる  $S$  の  $k + 1$  点の組み合わせは最大で  $\binom{|S|}{k+1}$  通りあり、かつ 1 組の  $k + 1$  点について、それらを臨界点として持つ離散多項式曲線は  $2^{k+1}$  通り存在する（各点について上の臨界点か下の臨界点かの 2 通りの可能性があるため）．したがって、全探索には最大で  $2^{k+1} \binom{|S|}{k+1}$  回の反復が必要

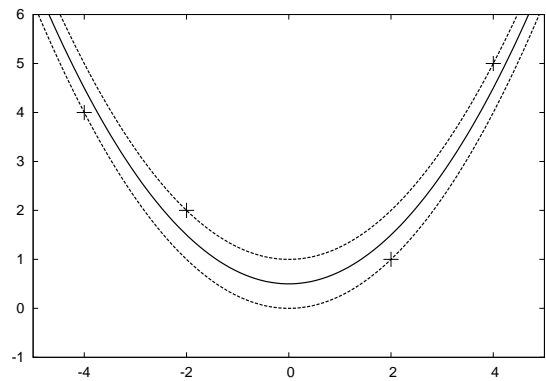


図 4 連続モデルを用いた RANSAC では見つけれられない合意集合． $k = 2, w = 0.5$  であるとき、4 点すべてをイン라이어にするのは実線で描かれた  $y = 0.25x^2 + 0.5$  のみであるが、この曲線上には点が存在しないので生成され得ない．破線で描かれた曲線は許容範囲の境界である．これら 2 曲線を支持線として考えれば、この離散多項式曲線は臨界点という概念を用いて生成することができる．

になる． $|S|$  および  $k$  が大きいとき、これには非常に大きな時間がかかる．この節では、局所探索法を取り入れることで、最適解を効率的に探す手法を提案する．

局所探索法を用いるために、 $\mathbb{G}_{S,k,w}$  の中で近傍を定義する． $D \in \mathbb{G}_{S,k,w}$  は  $x$  座標がそれぞれ異なる臨界点を少なくとも  $k + 1$  個持つ．それらのうち  $k$  個の臨界点が上下も含め  $D$  と共通である、 $D$  でない  $\mathbb{G}_{S,k,w}$  の離散多項式曲線の集合を  $D$  の近傍と呼び、 $N(D)$  で表す．

提案手法は、まず RANSAC を用いて任意の  $\mathbb{G}_{S,k,w}$  の離散多項式曲線を初期解として生成し、その後は臨界点を 1 つ変更することで得られる近傍解の中で最も多くのイン라이어を持つものに反復的に解を移していく．最も多くのイン라이어を持つ解が複数見つかった場合は、それらすべての近傍解に対して同様の処理を行う．現在の解と同数以上のイン라이어を持つ近傍解が存在しなくなった時点で反復を終了する．このアルゴリズムを Rock Climbing と呼ぶ\*1．具体的な手続きを Algorithm 1 に示す．

Rock Climbing がその出力に対して保証する精度について述べる．ある合意集合  $C$  の上位集合であるような合意集合が存在しないとき、 $C$  を極大合意集合と呼ぶ．

定理 3. Rock Climbing は必ず極大合意集合を持つ離散多項式曲線を出力する．

証明．係数  $(a_1, \dots, a_{k+1})$  の集合がなす  $k + 1$  次元空間を用いて証明する．この空間をパラメタ空間と呼ぶ．準備として、まずは離散多項式曲線あてはめ問題を、パラメタ空間を用いて再考する．点  $(x', y') \in \mathbb{Z}^2$  を含むような離散多項式曲線  $D \in \mathbb{D}_{k,w}$  の係数  $(a_1, \dots, a_{k+1})$  の集合は、パラメタ空間では平行する 2 枚の超平面に挟まれた領域、

\*1 岩登りの際に用いられる、4 本の手足のうち 3 本で体を支え、残りの 1 本を次の手がかり、足がかりに移動させる 3 点確保と呼ばれる技術にちなんだ比喩である．

**Algorithm 1** Rock Climbing

**Input:** 離散点集合  $S$ , 次数  $k$ , 幅  $w$ , RANSAC の反復回数  $t$   
**Output:** 最適と思われる  $\mathbb{G}_{S,k,w}$  の離散多項式曲線の集合  $L$

- 1:  $L := \{ \text{反復回数 } t \text{ の RANSAC を用いて得られた } \mathbb{G}_{S,k,w} \text{ の離散多項式曲線} \}$
- 2: **loop**
- 3:  $L' := \text{最も多くのインライア-を持つ } L + \bigcup_{D \in L} N(D) \text{ の離散多項式曲線の集合}$
- 4: **if**  $L = L'$  **then**
- 5:     ループを抜ける
- 6: **else**
- 7:      $L := L'$
- 8: **end if**
- 9: **end loop**
- 10: **return**  $L$

$0 \leq -x_1^k a_1 - \dots - x_n^k a_n - a_{k+1} + y \leq w$  をなす．左側の等号が成り立つとき  $(x', y')$  は下の臨界点であり，右側の等号が成り立つときは上の臨界点である．したがって， $S$  のすべての点  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  についてこのような不等式を考えれば，最適解はそれら不等式，すなわち

$$\begin{aligned} 0 &\leq -x_1^k a_1 - \dots - x_1 a_k - a_{k+1} + y_1 \leq w \\ 0 &\leq -x_2^k a_1 - \dots - x_2 a_k - a_{k+1} + y_2 \leq w \\ &\vdots \\ 0 &\leq -x_n^k a_1 - \dots - x_n a_k - a_{k+1} + y_n \leq w \end{aligned} \quad (3)$$

のうち最も多くを満たす係数である．満たされる不等式の数がインライア-の数である．

次に， $D \in \mathbb{G}_{S,k,w}$  がパラメタ空間においてどこに位置するかを明らかにする． $D$  は  $x$  座標がそれぞれ異なる  $k+1$  個以上の臨界点を持つから，その係数はそれら臨界点に対応する等号を不等式 (3) の中で成立させる．1つの等式が1枚の超平面を表すから， $D$  はそれら等式によって表される超平面の交点に位置する．定理 1 より，それら超平面は必ず 1 点で交わる．ここで， $D$  の係数を一意に決める  $k+1$  個の等式のうち任意の 1 つを取り消すと，残りの  $k$  個の等式はパラメタ空間で  $D$  の点を通る直線 ( $k$  枚の超平面の交差) を表す．この直線上の係数を持つ  $\mathbb{D}_{k,w}$  の離散多項式曲線は， $D$  と上下も含め共通である  $k$  個の臨界点を持つ．したがって，近傍解  $D' \in N(D)$  はこのような直線上に位置する．(見やすさのため)  $k=1$  の場合のパラメタ空間と近傍の例を図 5 に示す．

Rock Climbing の出力の合意集合が必ず極大であることを証明するためには，現在の解の合意集合  $C$  が極大でないとき，現在の解と同数もしくはより多くのインライア-を持つ近傍解をたどっていくことで必ず合意集合  $C' \supset C$  を持つ離散多項式曲線を見つけられることを示せばよい． $D \in \mathbb{D}_{k,w}$  が  $D \supset C = \{(i_1, j_1), \dots, (i_m, j_m)\}$  を満たすとき， $D$  の係数  $a_1, \dots, a_{k+1}$  は不等式系

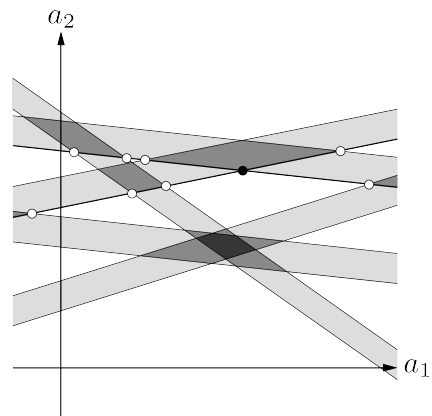


図 5  $k=1$  の場合のパラメタ空間と近傍の例．より多くの不等式を満たす領域ほど濃い色で塗られている．平行する 2 直線に挟まれた各領域の縦幅は等しく  $w$  であることに注意．黒い点の近傍の要素を白い点で表す．

$$\begin{cases} 0 \leq -i_1^k a_1 - \dots - i_1 a_k - a_{k+1} + j_1 \leq w \\ 0 \leq -i_2^k a_1 - \dots - i_2 a_k - a_{k+1} + j_2 \leq w \\ \vdots \\ 0 \leq -i_m^k a_1 - \dots - i_m a_k - a_{k+1} + j_m \leq w \end{cases} \quad (4)$$

を満たす．パラメタ空間において，この線形不等式系によって表される領域は凸多面体であり，その各頂点は  $\mathbb{G}_{S,k,w}$  の要素である．それらのうちの 1 つを現在の解とする．もし  $C$  が極大合意集合でないとしたら，もう 1 つの点  $(i_{m+1}, j_{m+1}) \in S \setminus C$  について，

$$0 \leq -i_{m+1}^k a_1 - \dots - i_{m+1} a_k - a_{k+1} + j_{m+1} \leq w \quad (5)$$

を満たす係数が式 (4) の凸多面体の中に含まれる．そのような係数の集合もまた凸多面体をなす．式 (5) の領域が式 (4) の領域との交差を持つとき，前者の境界である 2 枚の超平面の少なくとも片方は必ず後者の内部を横切る\*2．したがって，式 (4) と式 (5) の両方を満たす係数の集合がなす凸多面体の各頂点は，式 (4) の凸多面体の頂点もしくは边上に位置する．これら頂点は  $\mathbb{G}_{S,k,w}$  の要素であり，また式 (4) の凸多面体の中に現在の解よりインライア-が少ない解は存在しないので，近傍解をたどっていくことで，必ず式 (4) と (5) の解の集合である凸多面体の頂点に到達できる．図 6 はこれを図解する．この議論は現在の解の合意集合  $C$  が極大でない限り成り立つ．したがって，Rock Climbing の出力の合意集合は必ず極大である．□

定理 3 のような保証は RANSAC では得られない．最大合意集合も極大合意集合であるので，Rock Climbing の出力は RANSAC のそれより最適解であることに対する信頼性が高い．

\*2 式 (4) の凸多面体が完全に式 (5) の領域の内部にある場合は考えなくてもよい．なぜなら，その場合  $C$  のすべての点がインライア-であるとき，必ず点  $(i_{m+1}, j_{m+1})$  もインライア-であることになり，現在の解の合意集合が  $C$  であることと矛盾するからである．

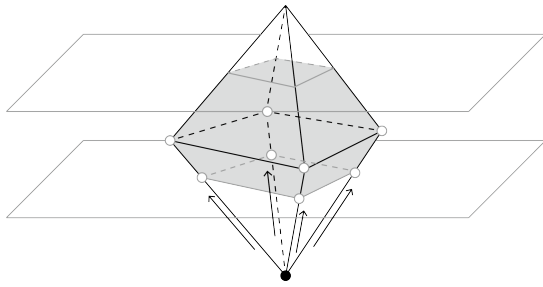


図 6 よりよい解への路．黒い点を現在の解とし，その近傍解を白い点で表す．現在の解の合意集合  $C$  を含む離散多項式曲線  $D \in \mathbb{D}_{k,w}$  の係数の集合である凸多面体を黒の線で描く． $C$  が極大合意集合でないとき，不等式を 1 つ加えることで得られるグレーの凸多面体の各頂点は，1 つめの凸多面体の辺もしくは頂点上に位置し，近傍解をたどることで到達できる．

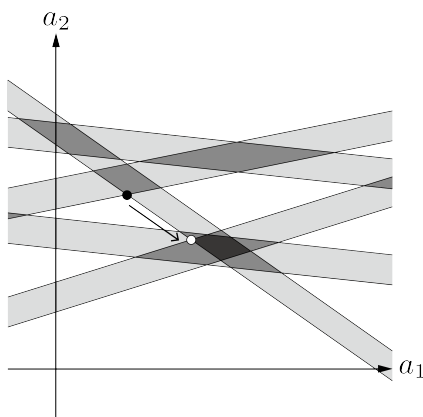


図 7 “谷越え”．白い点は黒い点の近傍解であり，かつ黒い点より多くのインライアーを持つ．この移動はインライアーの数が少ない (色の薄い) 区間を飛び越える．

Rock Climbing は極大合意集合を持つ離散多項式曲線を出力することを述べたが，そのような局所最適解で必ずしも探索が終結しないことに注意されたい．Rock Climbing は現在の解の臨界点を 1 つ変更することで得られる近傍解をすべて調べ，いくつかのインライアーを捨てても，合計数が最も多くなるような近傍解に移る．したがってこの手法では，図 7 に描かれるような，“谷を越える” 移動が起こり得る．つまり，現在の解の合意集合が極大であっても，近傍解の中により多くのインライアーを持つものが存在すれば探索は続行される．

Rock Climbing の出力は初期解に依存する．谷越えの能力があるからといって，いつも最適解にたどり着けるとは限らず，局所最適解で探索を終了してしまう可能性もある．そのため，最初に RANSAC を用いてなるべく多くのインライアーを持つ初期解を選ぶ．ただし，これは，最適解は最も多くのインライアーを持つので，インライアーが多い初期解ほど (より少ない反復回数で) 最適解にたどり着く可能性が高いだろうという推測に基づく．

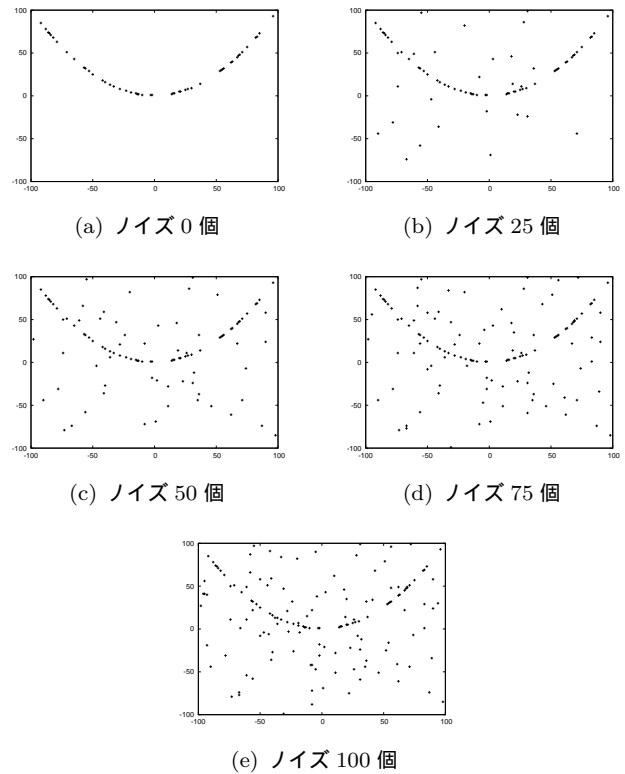


図 8 離散点集合  $S$ ．(a) は  $0 \leq 0.01x^2 \leq 1$  を満たす 50 個の点である．(a) にこの不等式を満たさない点をランダムに 25 個ずつノイズとして加えていき (b)-(e) を得た．

表 1 最適解発見時と探索終了時の平均反復回数 ( $k = 2$ )

ノイズの個数	0	25	50	75	100
最適解発見 ( $\times 10^3$ 回)	1.7	2.6	4.0	4.8	5.7
探索終了 ( $\times 10^3$ 回)	6.7	10.2	14.1	17.7	21.3

## 5. 実験

### 5.1 2 次離散多項式曲線あてはめ

図 8 に示される 5 つの離散点集合  $S \in \mathbb{Z}^2$  に対し， $k = 2$ ， $w = 1$ ，そして  $t = 1000$  として，Rock Climbing を適用した．図 8(a) は  $0 \leq 0.01x^2 \leq 1$  を満たす 50 個の点である．図 8(a) の点集合に，この不等式を満たさない点をランダムに 25 個ずつノイズとして加えていき図 8(b)-(e) を得た．5 つの離散点集合  $S$  のすべてについて，最大合意集合は図 8(a) の 50 点であることがわかっている．すべての  $S$  について，図 9 に示される離散多項式曲線を含む 7 通りの最適解が出力として得られた．最適解についての可能領域は，出力された 7 個の解を頂点とする凸多面体である．したがって，これら解からすべての最適解を生成することができる．この実験を 100 回繰り返し，毎回同じ結果が得られた．表 1 に各  $S$  についての最適解発見時と探索終了時の平均反復回数を載せる．ここで反復回数とは，RANSAC の反復回数 + 調査した近傍の数を指す．すなわち，離散多項式曲線を生成し合意集合を調べた回数である．

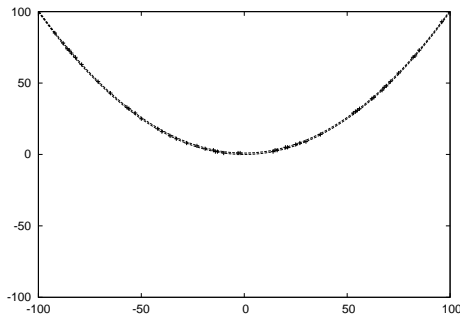


図 9 図 8(a) の入力点集合に対する Rock Climbing によるあてはめの結果．すべての点が点線で描かれた離散多項式曲線に含まれている．

表 2 RANSAC の最適解発見時の平均反復回数 ( $k = 2$ )

ノイズの個数	0	25	50	75	100
反復回数 ( $\times 10^4$ 回)	1.3	3.6	8.6	14.5	27.3

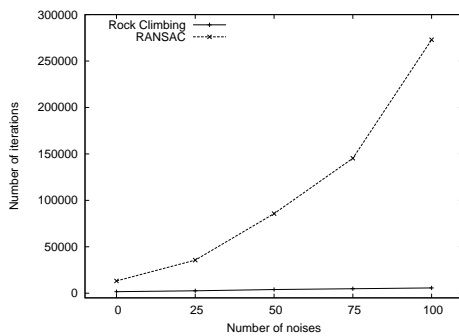


図 10 Rock Climbing と RANSAC の最適解を見つけるまでの反復回数の比較 ( $k = 2$ )．Rock Climbing は RANSAC よりも少ない反復回数で最適解を見つけ、かつノイズの増加から受けた影響が小さい．

同じ 5 つの離散点集合に対して RANSAC を用いたあてはめを実行し、その結果を Rock Climbing のそれと比較した． $k = 2, w = 1$  とし、最適解が発見されたら探索終了とした．この実験を 100 回繰り返したときの、最適解発見までの平均反復回数を表 2 に示す．図 10 は Rock Climbing と RANSAC の最適解発見までの平均反復回数を比較したグラフである．Rock Climbing の方が反復回数が少なく、また明らかにノイズの増加から受けた影響が小さい．ノイズの数が 0 から 100 に増加したときに、RANSAC の反復回数が 20.5 倍に増えているのに対し、Rock Climbing のそれは 3.2 倍にしか増えていない．

### 5.2 3 次離散多項式曲線あてはめ

図 11 に示される 5 つの離散点集合  $S \in \mathbb{Z}^2$  に対し、 $k = 3, w = 1$ 、そして  $t = 1000$  として、Rock Climbing を適用した．図 11(a) は  $0 \leq 0.0001x^3 \leq 1$  を満たす 50 個の点である．図 11(a) の点集合に、この不等式を満たさない点をランダムに 25 個ずつノイズとして加えていき図 11(b)-(e) を得た．5 つの離散点集合  $S$  のすべてについて、最大合意集

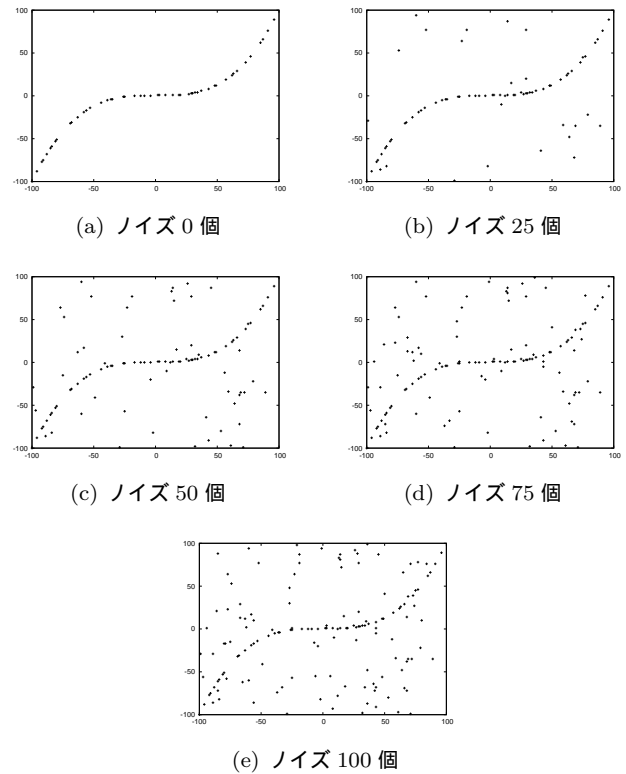


図 11 離散点集合  $S$ ．(a) は  $0 \leq 0.0001x^3 \leq 1$  を満たす 50 個の点である．(a) にこの不等式を満たさない点をランダムに 25 個ずつノイズとして加えていき (b)-(e) を得た．

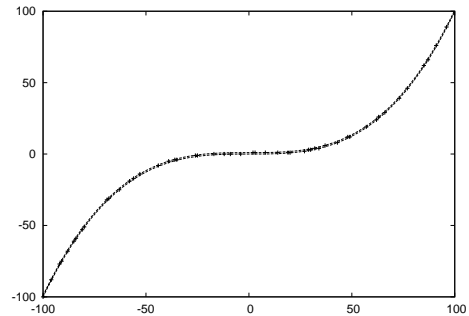


図 12 図 11(a) の入力点集合に対する Rock Climbing によるあてはめの結果．すべての点が点線で描かれた離散多項式曲線に含まれている．

表 3 最適解発見時と探索終了時の平均反復回数 ( $k = 3$ )

ノイズの個数	0	25	50	75	100
最適解発見 ( $\times 10^3$ 回)	2.5	5.2	8.0	10.1	13.7
探索終了 ( $\times 10^4$ 回)	1.5	2.4	3.4	4.2	5.1

合は図 11(a) の 50 点であることがわかっている．すべての  $S$  について、図 12 に示される離散多項式曲線を含む 29 通りの最適解が出力として得られた．この実験を 100 回繰り返し、毎回同じ結果が得られた．表 3 に各  $S$  についての最適解発見時と探索終了時の平均反復回数（前実験と同じ意味）を載せる．

$k = 2$  のときと同様に RANSAC との比較を行った．

表 4 RANSAC の最適解発見時の平均反復回数 ( $k = 3$ )

ノイズの個数	0	25	50	75	100
反復回数 ( $\times 10^5$ 回)	1.1	6.0	20.1	52.7	83.1

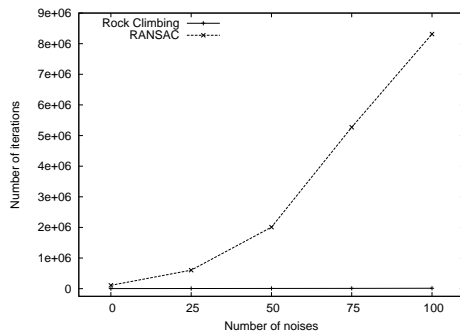


図 13 Rock Climbing と RANSAC の最適解を見つけるまでの反復回数の比較 ( $k = 3$ ) . Rock Climbing はノイズの増加から受けた影響が RANSAC よりも小さい .

RANSAC の結果を表 4 に示し , 比較のグラフを図 13 に示す .  $k = 2$  の場合と同様なことが言える . ノイズの数が 0 から 100 に増加したときに , RANSAC の反復回数が 76.2 倍に増えているのに対し . Rock Climbing のそれは 5.5 倍にしか増えていない .

## 6. おわりに

本稿では多項式曲線の離散化 , すなわち離散多項式曲線を定義し , 与えられた離散点集合 , 次数 , そして幅に対して , 最も多くの点を含むような離散多項式曲線の係数を求めるという問題を扱った . 離散多項式曲線の性質を明らかにし , インライアーの数という観点から見れば , 連続モデルを用いるより離散モデルを用いた方が優れたあてはめが得られることを証明した . RANSAC と局所探索法を組み合わせた提案手法 Rock Climbing は , RANSAC よりも精度に対する信頼性の高いあてはめを行えることを示し , 実験によってその効率性を検証した . 今後はこの手法のより解析的な評価 , およびアルゴリズムの改善を行う . また , 2 次曲線などのより一般化されたモデルに対して適用できる手法の開発を行いたい .

## 参考文献

- [1] D. Aiger, Y. Kenmochi, H. Talbot, and L. Buzer. Efficient robust digital hyperplane fitting with bounded error. In *Proceedings of the 16th IAPR international conference on Discrete geometry for computer imagery*, Vol. 6607 of LNCS, pp. 223–234. Springer-Verlag, 2011.
- [2] M.A. Fischler and R.C. Bolles. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, Vol. 24, No. 6, pp. 381–395, 1981.
- [3] Y. Gérard, L. Provot, and F. Feschet. Introduction to digital level layers. In *Proceedings of the 16th IAPR international conference on Discrete geometry for computer imagery*, Vol. 6607 of LNCS, pp. 83–94. Springer-Verlag,

- 2011.
- [4] L. Provot and Y. Gérard. Estimation of the derivatives of a digital function with a convergent bounded error. In *Proceedings of the 16th IAPR international conference on Discrete geometry for computer imagery*, Vol. 6607 of LNCS, pp. 284–295. Springer-Verlag, 2011.
- [5] P.J. Rousseeuw. Least median of squares regression. *Journal of the American statistical association*, pp. 871–880, 1984.
- [6] R. Zrou, Y. Kenmochi, H. Talbot, L. Buzer, Y. Hamam, I. Shimizu, and A. Sugimoto. Optimal consensus set for digital line and plane fitting. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, Vol. 21, No. 1, pp. 45–57, 2011.
- [7] R. Zrou, G. Largeteau-Skapin, and E. Andres. Optimal consensus set for annulus fitting. In *Proceedings of the 16th IAPR international conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, Vol. 6607 of LNCS, pp. 358–368. Springer-Verlag, 2011.